第三章：线性方程组

2022.03.01

初中：二元一次方程组，三元一次方程组。（鸡兔同笼）

现在：任意个变量及任意个方程构成的一次方程组，即

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (*)$$

a_{ij}：（第 i 个方程第 j 个变量 x_j 的）系数

b_i：（第 i 个方程的）常数项

若 $b_1 = \cdots = b_m = 0$，则称 $(*)$ 为齐次线性方程组。否则称之为非齐次线性方程组

若 $x_1 = c_1, \cdots, x_n = c_n$ 为代入 $(*)$ 等式都成立，则称 $(c_1, \cdots, c_n)$ 为 $(*)$ 的一组解。

解集 = 所有解组成的集合。

称 $(*)$ 是 $\begin{cases} \text{相容的，若解集非空.} \\ \text{不相容的，若解集为空集} \end{cases}$

基本问题：

1) 存在性，唯一性

2) 如何求解

3) 公式表示

九章算术

Gauss 消元法

§3.1 Gauss 消元法

例 3.1.1 求解

$$
\begin{cases}
3x_1 + 2x_1 - x_3 = 6 & ① \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ② \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & ③
\end{cases}
\qquad (*)
$$

解：

$$
(*) \Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ④ \\
2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 & ⑤ \\
3x_1 + 2x_1 - x_3 = 6 & ⑥
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ⑦ \\
-7x_2 - x_3 = -15 & ⑧ \\
-7x_2 - 7x_3 = -21 & ⑨
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 & ⑦ \\
-7x_2 - x_3 = -15 & ⑧ \\
-6x_3 = -6 & ⑨
\end{cases}
$$

$$
\Rightarrow
\begin{cases}
x_3 = 1 \\
x_2 = 2 \\
x_1 = 1
\end{cases}
$$

代入(*)验证.

方程的三种初等变换 记号

(1) 交换两个方程 $(i) \leftrightarrow (j)$

(2) 某个方程乘一个非零常数 $\lambda(i)$

(3) 某个方程乘一常数加到另一个方程中 $\lambda(i) \to (j)$

例：
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 & (1) \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 1 & (2) \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 19x_4 = 6 & (3) \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 24x_4 = 7 & (4) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-3(1)\to(4)]{\substack{-1(1)\to(2) \\ -2(1)\to(3)}} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 & (5) \\ -3x_3 - 9x_4 = 4 & (6) \\ -9x_3 - 27x_4 = 12 & (7) \\ -12x_3 - 36x_4 = 16 & (8) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-4(6)\to(8)]{-3(6)\to(7)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3 \\ -3x_3 - 9x_4 = 4 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1-2t_1+5t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = -\frac{4}{3}-3t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \quad 其中 t_1, t_2 \in F.$$

例：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (1) \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3 & (2) \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow[-2(1)\to(3)]{-1(1)\to(2)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 & (4) \\ -2x_3 = 2 & (5) \\ -3x_3 = 1 & (6) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{-\frac{3}{2}(5)\to(6)} \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -2x_3 = 2 \\ 0 = 2 \end{cases} \lightning$$

$\Rightarrow$ 无解！

同解方程组：两个线性方程组有相同的解.

定理：三种初等变换将线性方程组变为同解线性方程组.

§3.2. Gauss 消元法的矩阵表示

矩阵：若干行若干列的数构成的阵列

例如 $(*)^{3.1}$ 的系数和常数

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & \cdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \leftarrow (*) \text{的增广矩阵}$$

变元不参与运算 ⇒ 方程组用其增广矩阵表示.

例 (Gauss 消元法的矩阵表示)

解:
$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_3]{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[-3r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & -7 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{6}r_3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 9 \\ 0 & -7 & -1 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-2r_3 \to r_1]{r_3 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -14 \\ & & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_2 \to r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

例：求解 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0 \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=0 \end{cases}$

解：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1+t_2+5t_3 \\ x_2 = -2t_1-2t_2-6t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \\ x_5 = t_3 \end{cases}$

例：求解 $\begin{cases} 3x_1-2x_2+5x_3+4x_4=2 \\ 6x_1-7x_2+4x_3+3x_4=3 \\ 9x_1-9x_2+9x_3+7x_4=-1 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -7 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -9 & 9 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

⑥ $\Rightarrow$ 无解.

§3.3 一般线性方程组的Gauss消元法

§3.3.1 算法描述

(1) $\exists\ a_{i1} \neq 0 \Rightarrow$ 交换行，不妨设 $a_{11} \neq 0$

(2) 减去第一行的倍数使得新矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \boxed{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \boxed{a_{2n}^{(1)}} & b_2^{(1)} \\ \cdots & & & & \\ 0 & \boxed{a_{m2}^{(1)}} & \cdots & \boxed{a_{mn}^{(1)}} & b_m^{(1)} \end{pmatrix}$$

找到 $a_{22}^{(1)}, a_{32}^{(1)}, \cdots, a_{m2}^{(1)}, a_{23}^{(1)}, \cdots, a_{m3}^{(1)}, \cdots\ a_{mn}^{(1)}, b_2^{(1)} \cdots b_m^{(1)}$ 第一个非零元

不妨设为 $a_{ij_2}^{(1)}$，

(3) 交换行，不妨设 $a_{2j_2}^{(1)} \neq 0$ 且 $a_{ij}^{(1)} = 0\ \ \forall\ 1 \leq j < j_2$，$\forall\ 2 \leq i$

(4) 减去第二行的倍数使得矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j_2} & a_{1j_2+1} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2j_2}^{(1)} & a_{2j_2+1}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{3j_2+1}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} & b_3^{(2)} \\ \cdots & & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mj_2+1}^{(2)} & \cdots & a_{mn}^{(2)} & b_m^{(2)} \end{pmatrix}$$

$\to \underset{\text{重复}}{\cdots} \to$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \underset{\neq 0}{c_{11}} & c_{12} & \cdots & & & c_{1n} & d_1 \\ & & \underset{\neq 0}{c_{2\bar{j}_2}} & \cdots & & c_{2n} & d_2 \\ & & & \cdots & & & \\ & & & & \underset{\neq 0}{c_{r\bar{j}_r}} \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & & 0 & d_{r+1}\,? \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (r \le n)$$

⑦

最简形式 or 标准形式

§3.3.2 解的属性

定理 3.3.1 (3.1)的解有如下性质.

(1). $d_{r+1} \neq 0 \Rightarrow$ 无解

(2) $d_{r+1} = 0$ & $r = n \Rightarrow$ 解唯一

(3) $d_{r+1} = 0$ & $r < n \Rightarrow$ 有多解.

证: (1) 显然.

(2) $r = n \Rightarrow \bar{j}_i = i \quad \forall\, i = 1, \cdots, n$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & & c_{1n} & d_1 \\ & c_{22} & \cdot & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & c_{nn} & d_n \\ & & & 0 & 0 \\ & & & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 & \tilde{d}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & c_{nn} & \tilde{d}_n \\ & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\tilde{d}_1}{c_{11}}, \cdots, x_n = \frac{\tilde{d}_n}{c_{nn}} \Rightarrow \text{唯一}$$

⑧

(3) $d_{r+1}=0$ & $r<n$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad c_{2j_2}x_{j_2} + \cdots + c_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad \cdots \\ \qquad\qquad c_{rj_r}x_{j_r} + \cdots + c_{rn}x_n = d_r \end{cases}$$

$$\cancel{x_{j_1}},\ \underbrace{x_{j_1+1}, \cdots x_{j_2-1}\ \cancel{x_{j_2}},\ x_{j_2+1}, \cdots, x_{j_3-1}\ \cancel{x_{j_3}}, \cdots, \cancel{x_{j_r}}}_{}\ x_{j_r+1}, \cdots, x_n$$

n-r个独立变量，可取任意值

↳ 取定一组值后，$x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_r}$ 唯一确定

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha_{11}t_1 + \cdots + \alpha_{1,n-r}t_{n-r} + \beta_1 \\ x_2 = \alpha_{21}t_1 + \cdots + \alpha_{2,n-r}t_{n-r} + \beta_2 \\ \cdots \\ x_n = \alpha_{n1}t_1 + \cdots + \alpha_{n,n-r}t_{n-r} + \beta_n \end{cases}$$

↑

通解 $\xrightarrow{t_1\cdots t_{n-r}\text{ 取定值}}$ 特解 □

推论： 1) 齐次 ⇒ 总有解 (例如 $x_1=0, \cdots, x_n=0$)

↳ 零解，平凡解。其他解称为非平凡解

2) 齐次线性方程有非零解当且仅当 $r<n$

3) $m<n$，齐次 ⇒ 有非零解

$r \approx$ 独立方程的个数 ⇝ 决定解集的"大小"！

例：
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{cases}$$

解：
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7 & -4 & 11 & \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow[-r_1 \to r_3]{-2r_1 \to r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 7 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2 \to r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 3 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

有解 $\Leftrightarrow \lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5$

当 $\lambda = 5$ 时，
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 5x_2 + 3x_3 - 7x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\xRightarrow[x_4 = t_2]{x_3 = t_1} \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{5}t_1 - \frac{6}{5}t_2 + \frac{4}{5} \\ x_2 = \frac{3}{5}t_1 - \frac{7}{5}t_2 + \frac{3}{5} \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad t_1, t_2 \in F$$